جبر خطي (2)

المحاضرة النظرية الرابعة عشر

* تعميم للخاصة الأخيرة من خواص المؤثر الخطي :

بفرض $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ قيم ذاتية للمؤثر الخطي $T: V \to V$ وتقابلها الأشعة الذاتية $v_1, v_2 \ldots v_n$ على الترتيب فإذا كانت هذه القيم الذاتية مختلفة فيما بينها مثنى مثنى فإن الأشعة $v_1, v_2 \ldots v_n$ تكون مستقلة خطياً

مثال : $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ والمعرف بالشكل

$$T(x, y) = (x, y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^2$$

أي شعاعين غير متناسبين من $\mathbb{R}^2$ لها مستقلين خطياً وأي تركيب خطي لهذين الشعاعين لها أشعة ذاتية

* القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة مربعة *

تعريف : بفرض $A = [A_{ij}]_n$ مصفوفة مربعة من المرتبة n معرفة فوق الحقل $\mathbb{R}$ نقول عن العدد الحقيقي $\lambda \neq 0$ أنه قيمة ذاتية لـ A إذا وجد شعاع العمود $P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq O$ بحيث أن عدد عناصر الشعاع يساوي مرتبة المصفوفة والذي من أجله تتحقق العلاقة

(العامود الصفري)

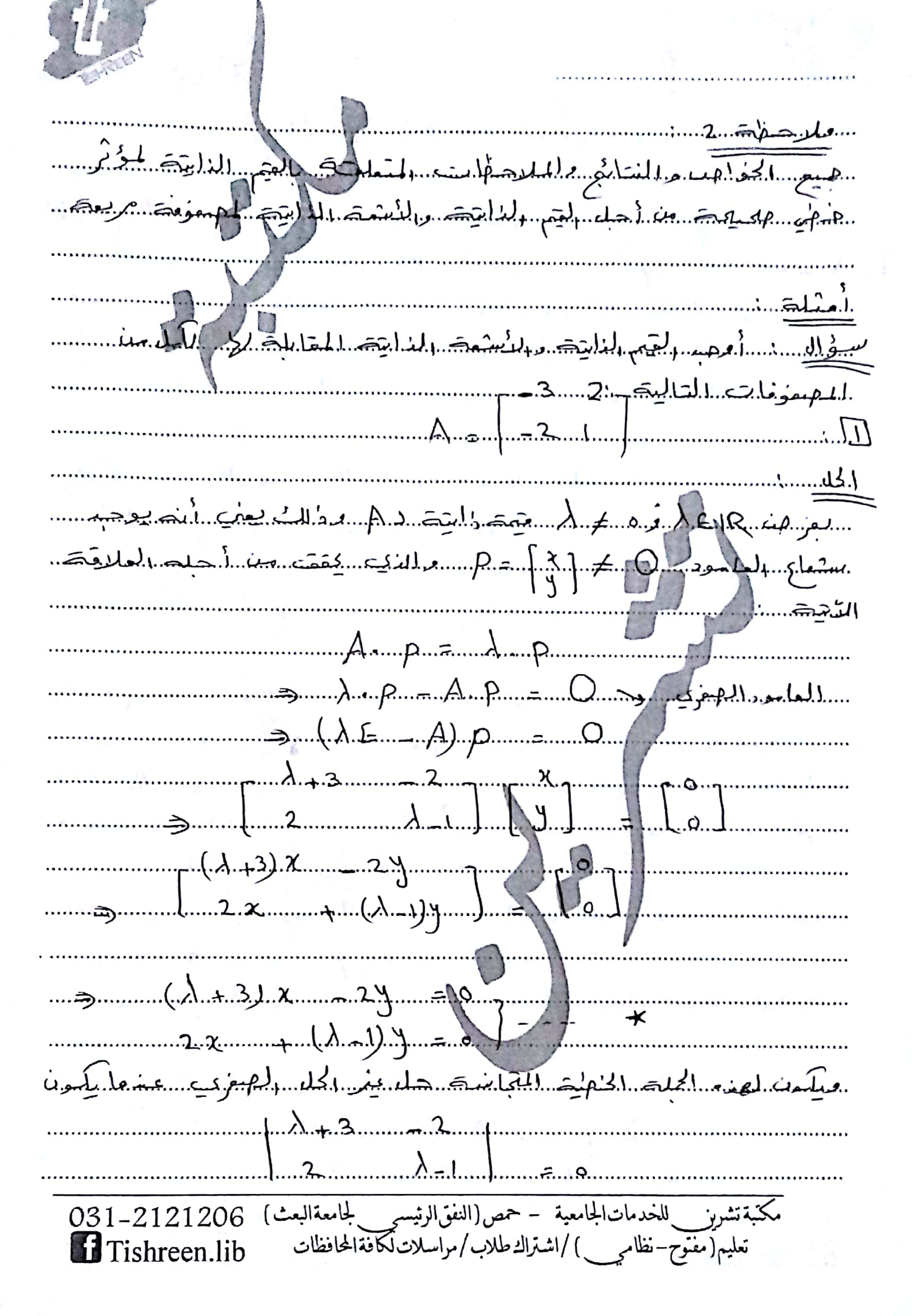
$$A \cdot P = \lambda \cdot P \quad *$$

ويسمى شعاع العمود P بشعاع ذاتي لـ A ويقابل القيمة الذاتية

ملاحظة 1 : يمكن كتابة العلاقة $*$ بالشكل الآتي

$$\lambda \cdot P - A \cdot P = O$$

$$\Rightarrow (\lambda E - A) P = O$$



ملاحظة 2:

جميع الخواص والنتائج والملاحظات المتعلقة بالقيم الذاتية لمؤثر خطي صحيحة من أجل القيم الذاتية والأشعة الذاتية لمصفوفة مربعة.

أمثلة:

سؤال: أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المقابلة لكل من المصفوفات التالية:

1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

الحل:

نفرض أن $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ A وذلك يعني أنه يوجد شعاع العامود $p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq O$ والذي يحقق من أجله العلاقة التالية:

$$A \cdot p = \lambda \cdot p$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot p - A \cdot p = O$$ ← العامود الصفري

$$\Rightarrow (\lambda E - A) p = O$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (\lambda+3)x - 2y \\ 2x + (\lambda-1)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (\lambda+3)x - 2y = 0 \\ 2x + (\lambda-1)y = 0 \end{matrix}\right\} \quad *$$

ويكون لهذه الجملة الخطية المتجانسة حل غير الحل الصفري عندما يكون

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-1) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 3\lambda - 3 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

لإيجاد الأشعة الذاتية للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = -1$

نعوض λ في المعادلات * فنحصل على

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array}\right] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

نأخذ أي قيمة اختيارية لـ x ماعدا الصفر

نأخذ $x = 1 \Leftarrow y = 1$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

للتحقق من الحل يجب أن تكون العلاقة $A \cdot P = \lambda \cdot P$ محققة

$$\ell_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\ell_2 = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذاً الحل صحيح

2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

بفرض $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ A عندئذٍ يوجد الشعاع $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$ والذي يحقق من أجله العلاقة الآتية

$$(\lambda E - A)P = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -3 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (\lambda-1)x - 4y = 0 \\ -3x + (\lambda-2)y = 0 \end{matrix}\right] \text{---} *$$

ولهذه الجملة حلول غير الحل الصفري عندما يكون معين أمثالها يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-5)(\lambda+2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5 \ , \ \lambda_2 = -2$$

لإيجاد الأشعة الذاتية المقابلة لـ A نعوض $\lambda_1 = 5$ في $*$ فنحصل على

$$4x - 4y = 0$$

$$-3x + 3y = 0$$

نقسم المعادلة الأولى على 4 والثانية على -3

$$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

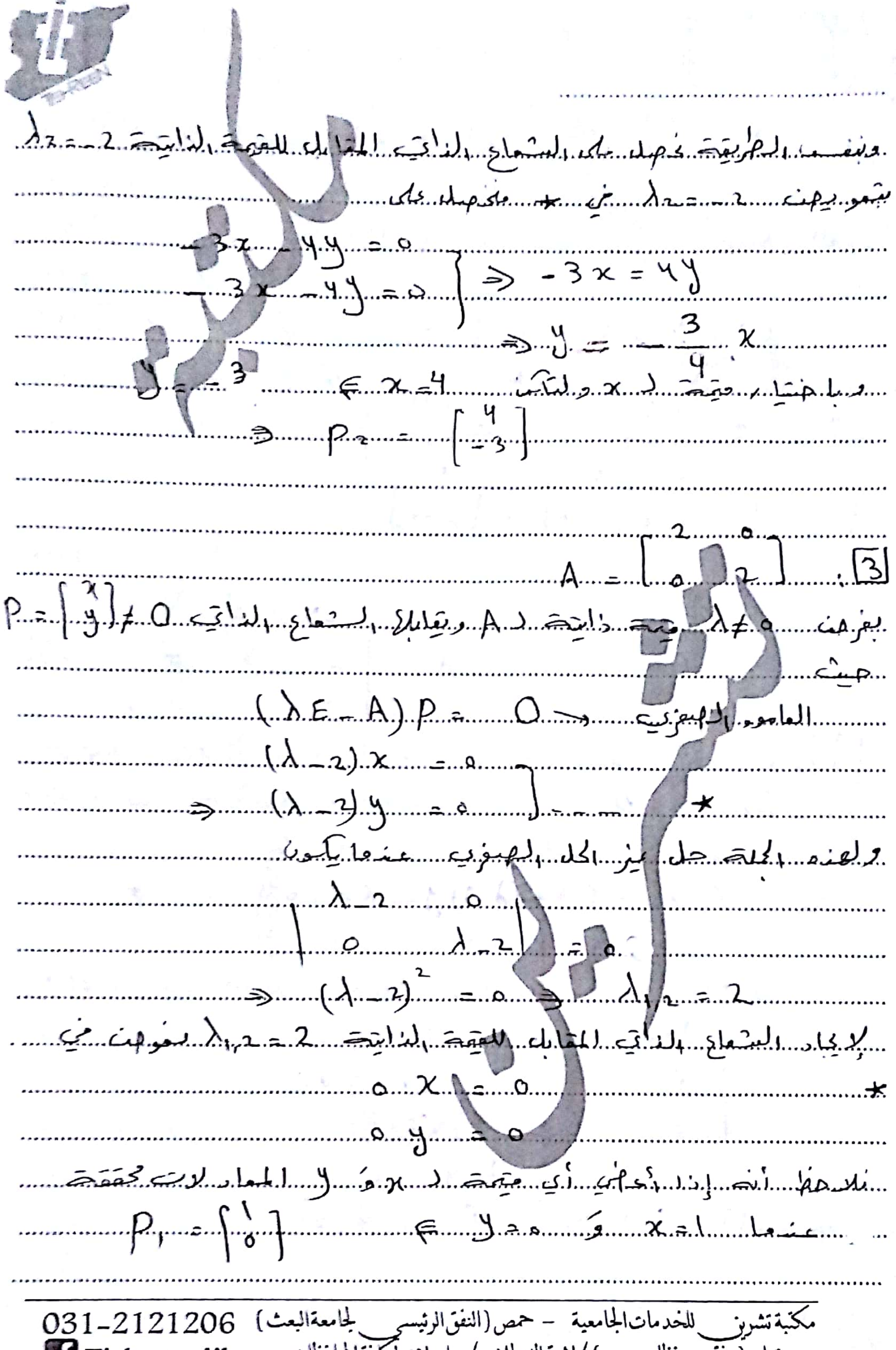
بأخذ $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

للتأكد من الحل بنفس الطريقة السابقة يجب أن تتحقق العلاقة

$$A \cdot P_1 = \lambda_1 \cdot P_1$$

$$\Rightarrow A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda_1 P_1$$

إذاً الحل صحيح



وبنفس الطريقة نحصل على الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$

بتعويض $\lambda_2 = -2$ في * نحصل على

$$\left.\begin{array}{l} -3x - 4y = 0 \\ -3x - 4y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3x = 4y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

وباختيار قيمة لـ x ولتكن $x = 4 \Rightarrow y = -3$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

بفرض $\lambda \neq 0$ قيمة ذاتية لـ A ويقابلها الشعاع الذاتي $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq O$

حيث

$(\lambda E - A)P = O \longrightarrow$ العامود الصفري

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\lambda - 2)x = 0 \\ (\lambda - 2)y = 0 \end{array}\right\} \text{-----} *$$

ولهذه الجملة حل غير الحل الصفري عندما يكون

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$

لإيجاد الشعاع الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_{1,2} = 2$ نعوض في *

$$0x = 0$$
$$0y = 0$$

نلاحظ أنه إذا أخذنا أي قيمة لـ x و y المعادلات تبقى محققة

عندما $x = 1$ و $y = 0 \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

عندما $x=0$ و $y=1$ ف $P_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

ملاحظة

أي تركيب خطي لـ P_1 و P_2 يكون متجهاً ذاتياً لـ A ويقابل القيمة الذاتية $\lambda=2$

لنأخذ التركيب الخطي $2P_1-7P_2=\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}$

نعوض في العلاقة $\lambda\cdot P=A\cdot P$

$P_1=2\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-14\end{bmatrix}$

$P_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-14\end{bmatrix}$

فالحل صحيح

4: $A=\begin{bmatrix}-4&3&3\\-6&5&6\\0&0&5\end{bmatrix}$

نفرض $\lambda\neq0$ قيمة ذاتية لـ A عندئذٍ يوجد الشعاع $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\neq0$

والذي تحقق من أجله العلاقة $(\lambda E-A)P=0$

$(\lambda+4)x-3y-3z=0$

$\Rightarrow 6x+(\lambda-5)y-6z=0$ --- *

$(\lambda-5)z=0$

وهذه الجملة المتجانسة لها غير الحلول الصفرية عندما يكون

$\begin{vmatrix}\lambda+4&-3&-3\\6&\lambda-5&6\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow(-1)^{3+3}(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda+4&-3\\6&\lambda-5\end{vmatrix}$

$\Rightarrow (\lambda-5)((\lambda+4)(\lambda-5)+18)$

$\Rightarrow (\lambda-5)(\lambda^2-5\lambda+4\lambda-20+18)$

$\Rightarrow (\lambda-5)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$

$\Leftarrow \lambda_1 = 5$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = -1$

الأشعة الذاتية المقابلة لـ $\lambda_1 = 5$

$9x - 3y - 3z = 0$ ①

$+6x - 6z = 0$ ②

نضرب المعادلة ① بـ -2 ونجمع مع المعادلة ②

$-18x + 6y + 6z = 0$

$6x - 6z = 0$

نجمع المعادلتين نجد

$-12x + 6y = 0$

نقسم على 6 نجد $+2x = y$

عندما $x = 1 \Leftarrow y = 2$ ولدينا $6x = 6z \Leftarrow$

$z = 1 \Leftarrow$

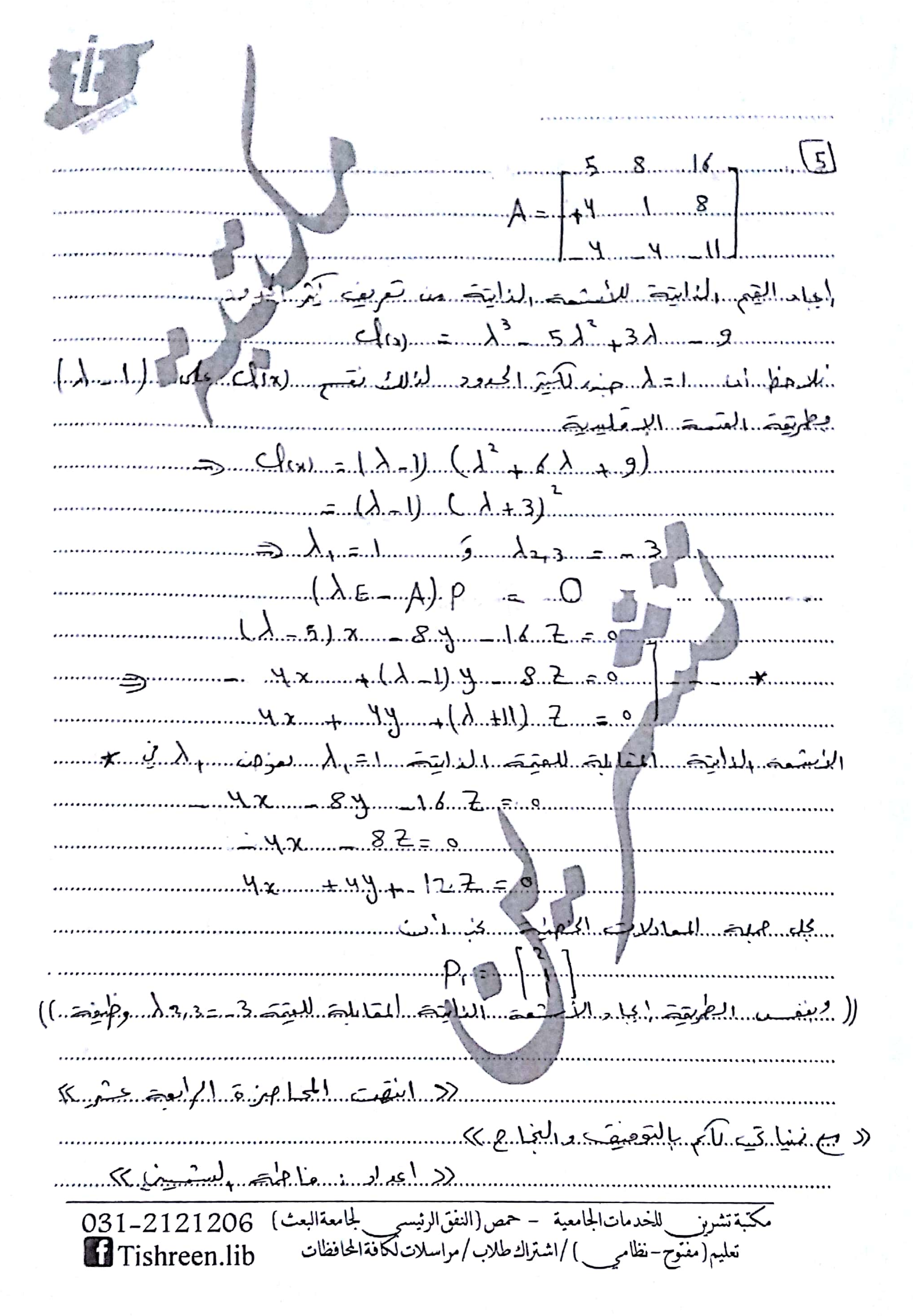
$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأشعة الذاتية المقابلة لـ $\lambda_2 = 2$ بنفس الطريقة السابقة نجد أن

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة نجد أن الأشعة الذاتية المقابلة لـ $\lambda_3 = -1$ هي

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ +4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

إيجاد القيم الذاتية للأشعة الذاتية من تعريف كثير الحدود

$$C(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

نلاحظ أن $\lambda = 1$ جذر لكثير الحدود لذلك نقسم $C(\lambda)$ على $(\lambda - 1)$ بطريقة القسمة الإقليدية

$$\Rightarrow C(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 9)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \text{و} \quad \lambda_{2,3} = -3$$

$$(\lambda E - A) \cdot P = 0$$

$$(\lambda - 5)x - 8y - 16z = 0$$

$$\Rightarrow -4x + (\lambda - 1)y - 8z = 0 \quad *$$

$$4x + 4y + (\lambda + 11)z = 0$$

الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ نعوض λ_1 في *

$$-4x - 8y - 16z = 0$$

$$-4x - 8z = 0$$

$$4x + 4y + 12z = 0$$

بحل جملة المعادلات الخطية نجد أن

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

((وبنفس الطريقة إيجاد الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة $\lambda_{2,3} = -3$ وظيفة))

« انتهت المحاضرة الرابعة عشر »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

« إعداد: م. [illegible] »